不可测集有多复杂？

郝兆宽

复旦大学哲学学院

上海，2013 年10 月16 日

绪论：连续统假设的相对独立性

数学问题：X 是勒贝革可测的吗？

“哲学”问题：集合论与大基数

对话：数学的还是哲学的？

康托的连续统问题

连续统假设 CH

对任意实数的无穷子集 $X \subseteq \mathbb{R}$，X 的基数或者与自然数 $\mathbb{N}$ 相等，或者与 $\mathbb{R}$ 相等。

连续统问题

CH 是真的吗？

无穷基数的序列和 GCH

- $\mathbb{N}$ 的基数是最小的无穷，令其为 $\aleph_0$，大于 $\aleph_0$ 的最小基数为 $\aleph_1$，这样，我们有：

$$\aleph_0, \quad \aleph_1, \quad \aleph_2, \quad \cdots, \quad \aleph_\alpha, \quad \cdots.$$

- 容易证明 $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$，且 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$，所以 CH 等价于

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

- 所谓广义连续统假设是：

$$\text{对任意序数 } \alpha\text{，} 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

作为数学基础的 ZFC（I）

策梅罗-弗兰克系统（ZF）：

- 空集：空集 $\varnothing$ 是集合；
- 外延：$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b$;
- 分离：任给 X，$Y = \{x \in X \mid \varphi(x)\}$ 是集合；
- 对集：任给 a, b，$\{a, b\}$ 是集合；
- 并集：任给 X，$\bigcup X$ 是集合；
- 幂集：任给 X，$\mathscr{P}(X)$ 是集合；
- 无穷：存在一个无穷集合；
- 替换：任给 A，$f[A]$ 是集合；
- 基础：任意非空 x 包含 $a \in x$，使 $x \cap a = \varnothing$。

作为数学基础的 ZFC（II）

选择公理 AC

如果 $\mathcal{F}$ 是非空集合的族，则存在一个集合 S，S 与 $\mathcal{F}$ 中的每个元素相交都是单点集。

ZFC

$$\text{ZFC}=\text{ZF}+\text{AC}.$$

ZFC 是数学基础

φ 是数学定理的意思是：φ 是 ZFC 的定理。

连续统假设的独立性

定理. (Gödel， 1938)　CH 的否定不是 ZFC 的定理。

定理. (Cohen， 1963)　CH 不是 ZFC 的定理。

连续统问题有数学意义吗？

Cohen：连续统问题没有数学意义

因为它和它的否定都不是数学定理。

Gödel：连续统问题有数学意义

因为它关乎数学世界的一个事实，必定或者为真，或者为假。

连续统涉及“实数的任意子集”

有些数学家和哲学家认为，“实数的任意子集”这一概念没有具体的意义，因为在数学中我们只关心“可定义的实数子集”：

开集，闭集，波莱尔集，可测集，分析集，$\cdots$

勒贝革可测

定义. 所谓外测度是一个函数 $\mu^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\mu^*(X) = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} L(I_i) \mid (I_i)_{i\geq 1}\text{是}X\text{的开覆盖} \right\}.$$

定义. 一个集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 是可测的，当且仅当对任意集合 $T \subseteq \mathbb{R}$，都有

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap X) + \mu^*(T \cap (\mathbb{R} - X)).$$

而所谓勒贝革测度，就是外测度到全体可测集 $\mathcal{M}$ 上的限制，记为 μ。

问题：是否每个实数的子集都是可测的？

答：不是。

定理. 存在实数的子集 $X \notin \mathcal{M}$。

证明：定义 $x \sim y$ 当且仅当 $x - y \in \mathbb{Q}$，则 $\sim$ 是 $\mathbb{R}$ 上的等价关系。令 S 与每个等价类相交为单点集。 $\square$

实数的可定义子集——波莱尔集

定义. 令 $X \subseteq \mathbb{R}^n$，则

- 开集：X 的每个点都是内点；
- 闭集：X 的每个极限点属于 X;
- 波莱尔集：X 可由开集通过可数多次并、交或补运算得到。

波莱尔集是包含开集的最小的 σ 代数，即，包含开集并且对补、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ 运算封闭。

波莱尔集的谱系

$$\Sigma_1^0 = \text{开集} \quad \Pi_1^0 = \text{闭集}$$

$$\Sigma_2^0 = F_\sigma \quad \Pi_2^0 = G_\delta$$

$$\Sigma_3^0 = G_{\delta\sigma} \quad \Pi_3^0 = F_{\sigma\delta}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

波莱尔集的族 $\mathcal{B}$ 可表示为：

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Sigma_\xi^0 = \bigcup_{\xi<\omega_1} \Pi_\xi^0$$

实数的可定义子集——分析集

定义. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 的投影，记作 $A = \mathrm{Proj}(B)$，当且仅当

$$(x_1, \cdots, x_n) \in A \leftrightarrow \exists y (x_1, \cdots, x_n, y) \in B.$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是分析集当且仅当它是一个（$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的）波莱尔集的投影。

事实

- 存在一个分析集 X，X 不是波莱尔集；
- 一个集合 X 是波莱尔集当且仅当 X 和 $\mathbb{R}^n - X$ 都是分析集。

实数的可定义子集——投影集及其谱系

$$\Sigma_1^1 = \text{分析集} \qquad \Pi_1^1 = \mathbb{R}^n - \Sigma_1^1$$

$$\Sigma_2^1 = \mathsf{Proj}(\Pi_1^1) \quad \Pi_2^1 = \mathbb{R}^n - \Sigma_2^1$$

$$\Sigma_3^1 = \mathsf{Proj}(\Pi_2^1) \quad \Pi_3^1 = \mathbb{R}^n - \Sigma_2^1$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

投影集的族 $\mathcal{P}$ 可表示为:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_\xi^0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi_\xi^1$$

可定义子集的测度问题

简单的事实

- 开集是勒贝革可测的；
- 闭集是勒贝革可测的；
- 波莱尔集是勒贝革可测的，即 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$。

定理. (Luzin，1917) 所有分析集是勒贝革可测的。

Lzuin 问题

问题：(Luzin, 1925)

是否所有投影集都是勒贝革可测的？

答案：(Luzin, 1925)

人类不知道，也永远不会知道［是否每个投影集都是勒贝革可测的］。

PM：所有投影集都是勒贝革可测的。

Luzin 问题独立于 ZFC

定理. (Gödel, 1938) 可构成集的宇宙 L 满足 ZFC 的公理，并且 L 中存在实数的一个 Σ^1_2 子集不是勒贝革可测的，所以 PM 不是 ZFC 的定理。

定理. (Solovay, 1964) 假设存在不可达基数，则存在 V 的一个脱殊扩张，在其中所有投影集都是勒贝革可测的。所以 PM 的否定不是 ZFC 的定理。

Luzin 问题有数学意义吗？

Woodin：Luzin 问题有数学意义

因为它关乎数学世界的一个事实，必定或者为真，或者为假。而且，$\mathbb{R}$ 的投影子集可看做是从开集出发有穷次应用补运算和连续函数的像而得到的集合。这一过程中，经过 4 步得到的是分析集和余分析集。它们是勒贝革可测的。是经过 5 步达到的投影集，没有理由断言这一步之遥的可测性问题就是没有意义的了。（Woodin， 2003）

无穷之于有穷的性质

n 与 $\aleph_0$

- 不存在函数 $f: n \to \aleph_0$ 满足 $f[n]$ 在 $\aleph_0$ 中是无界的；
- 对任意 n，$2^n < \aleph_0$。

高阶无穷——不可达基数

定义. (Hausdorff, 1908; Sierpiński & Tarski, 1930; Zermelo,1930) 一个无穷基数 κ 称为不可达基数，当且仅当：

- κ 是正则的：对任意 $\lambda < \kappa$，不存在函数 $f\colon \lambda \to \kappa$ 使得 $f[\lambda]$ 在 κ 中无界，并且，
- κ 是强极限的：对任意 $\lambda < \kappa$，$2^\lambda < \kappa$。

事实：

- “存在不可达基数”不是 ZFC 的定理；
- ZFC 没有矛盾不蕴涵 ZFC+“存在不可达基数”没有矛盾。

高阶无穷——可测基数

定义. (Ulam, 1930) 一个不可数无穷基数 κ 称为可测基数，当且仅当 κ 上存在一个非平凡的，σ 可加的 0-1 测度。

定理. (Ulam & Tarski, 1930) 如果 κ 是可测基数，则 κ 是不可达基数。

集合宇宙——层垒的谱系

定义.

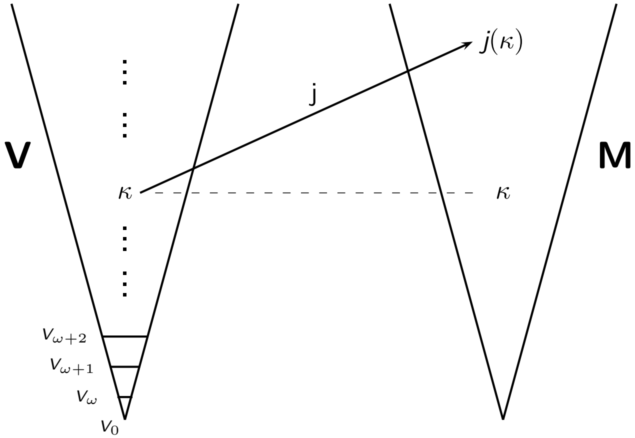
$$V_0 = \varnothing$$

$$V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$$

$$V_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha，\ \gamma \text{ 是极限序数}$$

$$V = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} V_\alpha.$$

初等嵌入



大基数的统一表示

定义. $j : M \to N$ 是初等嵌入当且仅当它满足:

- j 是单射;
- 对任意性质 $\varphi(x)$,

$$M \vDash \varphi(x) \leftrightarrow N \vDash \varphi(j(x))$$

如果 j 不是等同映射,则存在序数 α 使得 $j(\alpha) > \alpha$,满足这一条件的最小 α 称为 j 的关键点,记作 crt(j)。

大基数的统一表示

定理. (Keisler, 1962)　如果 M 是 ZFC 的内模型，$j: V \to M$ 是非平凡的初等嵌入，则 $\kappa =$crt(j)是可测基数。

定理.　如果 κ 是可测基数，则存在 $j: V \to M$ 是非平凡的初等嵌入，并且 $\kappa =$crt(j)。

大基数与 Luzin 问题

定理. (Solovay, 1964) 假设存在不可达基数，则存在 V 的一个脱殊扩张，在其中所有投影集都是勒贝革可测的。所以 PM 的否定不是 ZFC 的定理。

定理. (Shelah, 1979) 如果所有投影集都是勒贝革可测的，则 $\aleph_1$ 是不可达基数。

无穷集合上的博弈、可决定性

任给集合 $A \subseteq \mathbb{R}$，考虑如下博弈（Gale & Stewart, 1953）：

$$\begin{array}{lccccccc} \text{甲：} & \alpha_0, & & \alpha_2, & & \alpha_4, & & \ldots \\ \text{乙：} & & \alpha_1, & & \alpha_3, & & \alpha_5, & \ldots \end{array}$$

其中 $\alpha_i \in \{0,1\}$，所以 $\sum_{i\in\mathbb{N}}(\alpha_i/2^{i+1}) \in [0,1]$。

- 如果 $\sum_{i\in\mathbb{N}}(\alpha_i/2^{i+1}) \in A$ 则甲赢；否则乙赢。
- 如果甲、乙任何一方有必胜的策略，则集合 A 称为可决定的。

投影可决定性 PD

定理.

- 如果选择公理成立，存在集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ 不是可决定的；
- （Martin, 1975）所有波莱尔集都是可决定的。

投影决定性公理 PD

所有投影集都是可决定的。

定理. (Mycielski, Swierczkowski, 1964)　如果 PD 成立，则所有投影集都是勒贝革可测的。

Woodin 基数

定义. κ 是Woodin 基数当且仅当对任意 $f \in \kappa^{\kappa}$，存在序数 $\alpha < \kappa$ 使得 $f[\alpha] \subseteq \alpha$ 并且存在初等嵌入 $j : V \to M$ 满足：$\mathrm{crt}(j) = \kappa$ 并且 $V_{j(f)(\alpha)} \subseteq M$。

大基数与 PD

定理. (Martin & Steel, 1985)　如果存在无穷多个 Woodin 基数，则 PD 成立。

定理. (Woodin, 19??)　以下命题等价：

- PD；
- 对每一 $n \in \mathbb{N}$，存在一个可数模型 M 使得

$$M \models \text{ZFC} + \text{至少存在 } n \text{ 个 Woodin 基数。}$$

对话：数学的还是哲学的？

甲：是否每个投影集都是可测的？（Luzin,1925）

乙：这与是否存在大基数有关。（Woodin, 19??）

甲：这只能说我们永不会知道答案，因为数学定理就是 ZFC 的定理。（Shelah, 2003）

乙：这个问题关乎客观数学世界，应改有一个确定的答案，非真即假。（Gödel, 1964）

对话：数学的还是哲学的？

甲：可我们永不会知道答案。证明我们自己的无知也是一种荣耀。(Shelah, 2003)

乙：理性提出的问题，理性应改能够回答。Hilbert 说过："我们必须知道，我们能够知道。"(Gödel, 1951)

对话：数学的还是哲学的？

甲：嗯，不过，那些被证明是独立于 ZFC 的问题，大多是不重要的，不是真正的数学。（Magidor, 2012）

乙：数学家总是这样，一个本来非常“中心”的问题，一旦被发现是独立的，立刻就宣布它是“模糊”的，错误的，怀特海问题就是一个例子。这是不是有点“理智上不诚实”呢？（Magidor, 2012）

对话：数学的还是哲学的？

甲：你也要承认，今天 99% 的经典数学处于 V 的最下面三层，所以有人觉得超穷数理论太玄乎了。（Gödel, 1951）

乙：但低层谱的问题常需要更高层谱的事实来解决，这种事已经很多了。Goldstein 定理就是个例子，有些理论物理的结果甚至使用了 CH。（Gödel, 1951；Magidor, 2012）

甲：是吗？看来我要习惯一下。

谢 谢 ！